PART4　対数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_3(x-1)=2$　　(ii)　$\log_2 x=2\log_2(2-x)$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>-1$　　(ii)　$\log_2(x+1)+\log_2(5-x)\leqq 3$

Point Pickup

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$　　(ii)　$\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_2(x+5)\geqq 3$　　(ii)　$\log_{\frac{1}{2}}2x<2\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

第12講　PART4 確認問題

次の方程式を解け。

1　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=-3$

$x=$ ア

2　$\log_3(x-3)+\log_3(x+5)=2$

$x=$ イ

次の不等式を解け。

3　$\log_3(x-2)\leqq -1$

ウ

①　$2<x\leqq\frac{7}{3}$　　②　$x\geqq\frac{7}{3}$

③　$2<x\leqq 5$　　④　$x\geqq 5$

4　$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)<2\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

エ

①　$\frac{3}{2}<x<2$　　②　$x>6$

③　$2<x<6$　　④　$3<x<6$

PART4　対数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\log_3(x-1)=2$　　(ii)　$\log_2 x=2\log_2(2-x)$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>-1$　　(ii)　$\log_2(x+1)+\log_2(5-x)\leqq 3$

(1)(i)　対数の定義より　$x-1=3^2$　　$x-1=9$　　よって　$x=10$

(ii)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $2-x>0$　　よって　$0<x<2$ …… ①

このとき，方程式を変形すると　$\log_2 x=\log_2(2-x)^2$

よって　$x=(2-x)^2$　　$x^2-5x+4=0$　　$(x-1)(x-4)=0$　　$x=1,\ 4$

①より　$x=1$

(2)(i)　真数は正であるから　$x+1>0$　　よって　$x>-1$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}3$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x+1<3$　　$x<2$ …… ②

①，②より　$-1<x<2$

(ii)　真数は正であるから　$x+1>0$ かつ $5-x>0$　　よって　$-1<x<5$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_2(x+1)(5-x)\leqq\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2(x+1)(5-x)\leqq\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$(x+1)(5-x)\leqq 8$

よって　$x^2-4x+3\geqq 0$　　$(x-1)(x-3)\geqq 0$　　$x\leqq 1,\ 3\leqq x$ …… ②

①，②より　$-1<x\leqq 1,\ 3\leqq x<5$

練習

(1) 次の方程式を解け。

(i) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$　　(ii) $\log_3 x+\log_3(x-2)=1$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $\log_2(x+5)\geqq 3$　　(ii) $\log_{\frac{1}{2}}2x<2\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

(1) (i) 対数の定義より　$x+1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　$x+1=9$　　よって　$x=8$

(ii) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-2>0$　　よって　$x>2$ …… ①

このとき，方程式を変形すると　$\log_3 x(x-2)=\log_3 3$

よって　$x(x-2)=3$　　$x^2-2x-3=0$　　$(x-3)(x+1)=0$　　$x=3,\ -1$

①より　$x=3$

(2) (i) 真数は正であるから　$x+5>0$　　よって　$x>-5$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_2(x+5)\geqq\log_2 2^3$

すなわち　$\log_2(x+5)\geqq\log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x+5\geqq 8$　　$x\geqq 3$ …… ②

①，②より　$x\geqq 3$

(ii) 真数は正であるから　$2x>0$ かつ $x-4>0$　　よって　$x>4$ …… ①

このとき，不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}2x<\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$2x>(x-4)^2$

よって　$x^2-10x+16<0$　　$(x-2)(x-8)<0$　　$2<x<8$ …… ②

①，②より　$4<x<8$

第12講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：9

[解説]

対数の定義より [A]

$$x-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x-1=8$$

よって　$\boldsymbol{x=9}$

> [A]　対数関数を含む方程式
> 対数の定義
> $\log_a x=b \iff x=a^b$
> $(a>0,\ a \fallingdotseq 1,\ x>0)$
> を利用する。

2

[正解] イ：4

[解説]

真数は正であるから

$x-3>0$ かつ $x+5>0$ [B]

> [B]　真数が正であることに注意。

すなわち

$x>3$ かつ $x>-5$

よって　$x>3$　……①

このとき，方程式を変形すると

$\log_3(x-3)(x+5)=\log_3 3^2$ [C]

> [C]　対数関数を含む方程式
> 「底」を揃えて，対数の性質
> $p=q \iff \log_a p=\log_a q$
> $(p>0,\ q>0,\ a>0,\ a \fallingdotseq 1)$
> を利用する。

よって

$$(x-3)(x+5)=3^2$$

$$x^2+2x-24=0$$

$$(x+6)(x-4)=0$$

$$x=-6,\ 4$$

①より　$\boldsymbol{x=4}$

3　**[正解]** ウ：①

[解説]

真数は正であるから　$x-2>0$ [D]

よって　$x>2$　……①

このとき，不等式を変形すると

$$\log_3(x-2) \leqq \log_3 3^{-1}$$

すなわち

$$\log_3(x-2) \leqq \log_3 \frac{1}{3}$$

底 3 は 1 より大きいから [E]

$$x-2 \leqq \frac{1}{3}$$

$$x \leqq \frac{7}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$\boldsymbol{2 < x \leqq \frac{7}{3}}$

[D]　真数が正であることに注意。

[E]　対数関数を含む不等式
「底」を揃えて，対数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p < \log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \iff \log_a p > \log_a q$
を利用する。

4 **[正解]** エ：④

[解説]

真数は正であるから

$$2x-3>0 \text{ かつ } x-3>0$$ [F]

すなわち

$$x>\frac{3}{2} \text{ かつ } x>3$$

よって　$x>3$　……①

このとき，不等式を変形すると

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)<\log_{\frac{1}{2}}(x-3)^2$$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [G]

$$2x-3>(x-3)^2$$

よって

$$x^2-8x+12<0$$

$$(x-2)(x-6)<0$$

$$2<x<6 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$\boldsymbol{3<x<6}$

[F]　真数が正であることに注意。

[G]　対数関数を含む不等式
「底」を揃えて，対数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
　$0<p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$
・$0<a<1$ のとき
　$0<p<q \Longleftrightarrow \log_a p>\log_a q$
を利用する。